הרצאה מספר 12
אלגברה 1 מ 104016
הנושא: מערכות משוואות לינאריות
אלגוריתם הדירוג

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.11 הצורה הקנונית והדרגה

- נזכר שוב בדוגמה א', ובפרט במטריצה המורחבת שקיבלנו בסיום הדירוג:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- נשתמש בשורה השניה על מנת לאפס את האיבר השני בשורה הראשונה.
לצורך זה נבצע $R_1 \to R_1 + (2/5)R_2$.
- וכן נחלק את השורה השניה ב־ 5 כדי לקבל 1 כאיבר מוביל בשורה זו.
כלמור נבצע $R_2 \to (1/5)R_2$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.11 הצורה הקנונית והדרגה

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{lcl} R_1 & \to & R_1 + (2/5)R_2 \\ R_2 & \to & (1/5)R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6/5 & 2 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.11 הצורה הקנונית והדרגה

- <u>הגדרה:</u> מטריצה A היא בצורה קנונית ("מדורגת מצומצמת" (reduced row echelon form אם:
  1. A מדורגת.
  2. כל האיברים המובילים ב־ A שווים ל־ 1.
  3. בכל עמודה בה יש איבר מוביל, שאר האברים הם 0.
- למשל המטריצה הבא היא מדורגת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6/5 & 2 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.11 הצורה הקנונית והדרגה

- מערכת של מטריצה קנונית היא פשוטה מאוד:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6/5 & 2 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + (6/5)z = 2 \\ y + (-2/5)z = -1 \end{cases}$$

- לאחר העברת אגפים:

$$\begin{cases} x = (-6/5)z + 2 \\ y = (2/5)z - 1 \end{cases}$$

- כל משתנה תלוי מוגדר באופן ישיר בעזרת המשתנים החופשיים (ומקדמיהם בצורה הקנונית) והמקדמים החופשיים (בצורה הקנונית), ללא צורך בהצבה לאחורה של משתנים תלויים אחרים.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.11 הצורה הקנונית והדרגה

- <u>משפט:</u> כל מטריצה היא שקולת שורה
  1. למטריצה בצורה מדורגת.
  2. למטריצה בצורה קנונית יחידה.
- הוכחה הקיום הוא בעצם אבחנה ששיטת הדירוג מאפשר תמיד להגיע לצורות אלו.
- הוכחת היחידות של הצורה הקנונית היא טכנית.
- <u>הגדרה זמנית משופרת:</u> הדרגה (rank) של מטריצה היא מספר השורות שאינם 0 בצורה הקנונית שלה.
- השיפור הוא בכך שלפי המשפט, יש צורה קנונית יחידה, וכן אין חשש שהמושג "אינו מוגדר היטב". פתרנו בעיה זה בהגדרה הראשונית בעזרת משפט שמספר השורות השונות מאפס הוא זהה בכל צורה מדורגת.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.12 דוגמאות ג, ד, ה

- נשנה את דוגמה א' על ידי:
  - הוספת $+z$ למשוואה השלישית.
  - החסרת השורה השניה מהראשונה: $R_1 \to R_1 - R_2$
- בפועל אנו מתחילים מהמטריצה המורחבת השניה בדוגמה ג' של הדפים.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & z & = & -1 \\ x & + & 8y & - & 2z & = & -6 \end{array}\right. \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

- $k = 0$ האיבר המוביל השמאלית ביותר כבר נמצא בשורה הראשונה.
- עלינו לאפס איתו את המשך העמודה הראשונה.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.12 דוגמאות ג, ד, ה

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{lcl} R_2 & \to & R_2 - 2R_1 \\ R_3 & \to & R_3 - R_1 \\ R_4 & \to & R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 10 & -4 & -10 \end{array}\right)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.12 דוגמאות ג, ד, ה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 10 & -4 & -10 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{lcl} R_3 & \to & R_3 - R_2 \\ R_4 & \to & R_4 - 2R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.12 דוגמאות ג, ד, ה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ 5y - 2z = -5 \\ z = 0 \end{cases}$$

- פתרון המערכת:

1. משוואה אחרונה: $z = 0$.
2. משוואה לפני־אחרונה: $y = -1$.
3. משוואה ראשונה: $x = 2$.
4. <u>הפתרון היחיד:</u> $(2, -1, 0)$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.12 דוגמאות ג, ד, ה

נעבור לצורה הקנונית. ראשית נשנה את האיברים המובילים ל־ 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Big\Downarrow \quad R_2 \;\to\; (1/5)\cdot R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.12 דוגמאות ג, ד, ה

נטפל עכשיו באיפוס העמודה השניה מלבד האיבר המוביל שבה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Big\Downarrow \quad R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6/5 & 2 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.12 דוגמאות ג, ד, ה

נטפל עכשיו באיפוס העמודה השלישית מלבד האיבר המוביל שבה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6/5 & 2 \\ 0 & 1 & -2/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{lcl} R_1 & \to & R_1 - (6/5)R_3 \\ R_2 & \to & R_2 + (2/5)R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (x, y, z) = (2, -1, 0)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.12 דוגמאות ג, ד, ה

- בדוגמה ד': המערכת ההומוגנית המתאימה למערכת של דוגמה ג':
  - המערכת המדורגת, וכן הקנונית, הן המערכות ההומוגניות המתאימות.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  - פתרון יחיד למקרה ההומוגני: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.12 דוגמאות ג, ד, ה

- בדוגמה ה': שינוי נוסף לשורה הרביעית:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{lcl} R_1 & \to & R_1 - R_2 \\ R_2 & \to & R_2 - 2R_1 \\ R_3 & \to & R_3 - R_1 \\ R_4 & \to & R_4 - R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 10 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.12 דוגמאות ג, ד, ה

- דוגמה ה':

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 10 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow \quad \begin{array}{rcl} R_3 & \to & R_3 - R_2 \\ R_4 & \to & R_4 - 2R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

- קיבלנו **סתירה**: $0x + 0y + 0z = 12$ ולכן **אין פתרון**.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.13 שיטת הדירוג: אלגוריתם / מתכון

- הנחות מקדימות לפני הטיפול בשורה $k+1$:
  - k השורות הראשונות הן בצורה מדורגת.
  - האיברים המובילים בשורות $k+1$ ומטה כולם מימין לאיבר המוביל בשורה k.

k שורות מדורגות כבר	חלק מדורג כולל כל האיברים המובילים $0\cdots0 \quad * \quad ? \quad \cdots \quad ?$ $0\cdots \quad 0 \quad \cdots0 \quad * \quad ?$ $\ddots \quad \ddots \quad ?$ $0\cdots \quad \cdots \quad \cdots0 \quad *$	חופשי לא מפריע
$m-k$ שורות הנותרות	כאן יש רק 0־ים	חופשי דורש טיפול

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.13 שיטת הדירוג: אלגוריתם / מתכון

- לולאה ראשית של האלגוריתם לדירוג מטריצה A בעלת m שורות.

<u>הנחות:</u>
- k השורות הראשונות הן בצורה מדורגת.
- האיברים המובילים בשורות $k+1$ ומטה כולם מימין לאיבר המוביל בשורה k.

1. העבר לשורה $k+1$ (בעזרת החלפת שורות) את השורה שבו מופיע האיבר המוביל השמאלית ביותר מבין שורות $k+1$ עד m.
2. בעזרת כפולות של שורה $k+1$ (החדשה) אפס את כל האברים מתחת לאיבר המוביל שלו.

$\star$. עכשיו ההנחות מתקיימות ביחס ל־ $(k+1)$ השורות הראשונות.

3. עצור אם שאר השורות כולן 0, או שטיפלנו בשורה האחרונה.
4. אחרת הגדל את k באחד, וחזור לשלב 1 (שורה הבאה).

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.13 שיטת הדירוג: אלגוריתם / מתכון

- k השורות הראשונות הן בצורה מדורגת.
- האיברים המובילים בשורות $k+1$ ומטה כולם מימין לאיבר המוביל בשורה k.

1. העבר לשורה $k+1$ (בעזרת החלפת שורות) את השורה שבו מופיע האיבר המוביל השמאלית ביותר מבין שורות $k+1$ עד m.
2. בעזרת כפולות של שורה $k+1$ (החדשה) אפס את כל האברים מתחת לאיבר המוביל שלו.
3. עצור אם שאר השורות כולן 0, או שטיפלנו בשורה האחרונה.
4. אחרת הגדל את k באחד, וחזור לשלב 1 (שורה הבאה).

- בהתחלת האלגוריתם $k=0$, והתנאים מתקיימים באופן ריק.
- מכיון שיש מספר סופי של שורות, האלגוריתם חייב לעצור.
- בסיום, המטריצה תהיה בצורה מדורגת.
- האפשרות לבחירה בשלב 1 גורמת לכך שניתן להגיע לצורות מדורגות שונות של A.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.14 המעבר לצורה הקנונית: אלגוריתם

- מתחילים מצורה מדורגת כלשהו של A (לאחר דירוג רגיל).

1. מכפילים כל שורה שאינה אפס, בהופכי של האיבר המוביל שלה, על מנת להחליף את האיבר המוביל ב־ 1.
2. עבור $k = 2, 3, \ldots, \mathrm{rank}(A)$ (בסדר עולה):
   - חבר כפולות של שורה k לכל אחת מהשורות מעליו כדי לאפס את האיברים מעל האיבר המוביל של שורה k (אלו באותה עמודה).

- שימו לב: לאחר שמשתמשים בשורה k לאפס את שאר העמודה של האיבר המוביל שלה, לא נשתמש שוב בשורה זה, ולכן לא נבצע שינוי נוסף בעמודה המתוקנת.
- בסוף המטריצה תהיה בצורה קנונית.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.15 מספר הערות נוספות

- תהיו A, B שתי מטריצות A, B מאותו סדר ($A, B \in M_{m\times n}(F)$).
  <u>שאלה:</u> האם A ו־ B שקולי שורה?
- באופן עקרוני, צריך לבדוק האם יש סדרה סופית של פעולות שורה אלמנטריות המעבירות את A ל־B.
- אבל, אם התשובה היא חיובית אז הצורות הקנוניות של שתי המטריצות חייבות להיות זהות.
- לכן, שיטת בדיקה יעילה היא לחשב את הצורה הקנונית $\hat{A}$ של A, ואת הצורה הקנונית $\hat{B}$ של B.
  A ו־ B שקולי שורה אם"ם $\hat{A} = \hat{B}$.

- כמובן, שאם A ו־ B שקולי שורה אז $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.
- ולכן אם $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(B)$ אז בהכרח ש־ A ו־ B **אינן** שקולי שורה.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.15 מספר הערות נוספות

- תהי $A \in M_{m\times n}(F)$ כאשר $m < n$ (יותר משתנים ממשוואות).
  <u>טענה:</u> למערכת ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$ יש פתרון לא טריוויאלי.
- <u>הוכחה:</u>
  - $\mathrm{rank}(A) \leq m < n$ ולכן מספר דרגות החופש הוא $f = n - m > 0$.
  - לכן יש למערכת אינסוף פתרונות, ובפרט פתרון השונה מהפתרון הטריוויאלי.

$\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.15 מספר הערות נוספות

- תהי $A \in M_{m\times n}(F)$ כאשר $\operatorname{rank}(A) < m$ (יותר משוואות מהדרגה).
  <u>טענה:</u> קיים וקטור מקדמים חופשיים $\vec{b} \in F^m$ כך שלמערכת הלא־הומוגנית $A\vec{x} = \vec{b}$ אין פתרון.
- <u>הוכחה:</u>
  - תהי $\hat{A}$ צורה מדורגת של A.
  - לפי הנתון יש ב־ $\hat{A}$ שורת אפסים, ולכן בהכרח השורה האחרונה של $\hat{A}$ היא שורת אפסים.
  - אזי $\operatorname{rank}(\hat{A}|e_m) = \operatorname{rank}(A) + 1$ ולכן למערכת $\hat{A}\vec{x} = e_m$ אין פתרון.
  - יהי $\vec{b} \in F^m$ הוקטור כך שתהליך הדירוג של A ל־ $\hat{A}$ מעבירה את המטריצה המורחבת $(A|\vec{b})$ אל $(\hat{A}|e_m)$.
  - אזי למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ אין פתרון. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

3.16 תרגיל על פעולות שורה ומטריצות אלמנטריות

- <u>תרגיל:</u> תהי $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

ותהי $B = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$.

1. מצא סדרה שך פעולות שורה אלמנטריות שמעבירות את A ל־ B.
2. מצא מטריצה M כל ש־ $B = M \cdot A$.
3. מצא מטריצות אלמנטריות E_1, E_2, E_3 כל ש־ $B = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$.
4. חשב את $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot A$.

- פתרון בלוח.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות